Dr. Rita Fenz

Begriffslernen und Problemlösen

Wenn wir davon ausgehen, daß die Zielsetzung des Mathematikunterrichts Einsicht in die Begriffsbeziehungen und das Satzgefüge der Mathematik und eine darauf beruhende Beherrschung der elementaren mathematischen Techniken sein soll, dann sind Begriffslernen und Problemlösen wesentliche Bestandteile des Mathematikunterrichts, die ich im folgenden näher betrachten möchte. Ich gehe dabei aber nicht von einem psychologischen Ansatz aus - weder von den Lerntypen Gagnés noch von anderen lernpsychologischen Untersuchungen - sondern von einem didaktischen Ansatz: Wie kann durch die Einsicht in Begriffslernen und Problemlösen unser Unterricht effizienter gestaltet werden.

I Das Lernen mathematischer Begriffe

1. Arten von Begriffen

Begriffe werden gebildet, indem Objekte oder Ereignisse auf Grund gemeinsamer Merkmale zu Klassen zusammengefaßt und mit Namen bezeichnet werden. Die Gesamtheit aller für den Begriff wesentlichen Merkmale - die begriffsbildenden Eigenschaften - nennt man den Inhalt des Begriffs. Begriffsbildung setzt also die Fähigkeit zum Klassifizieren voraus. Der Schüler muß die entsprechenden Objekte miteinander vergleichen, Gemeinsames feststellen, wesentliche (relevante) von unwesentlichen (irrelevanten) Eigenschaften unterscheiden und durch Verallgemeinerung eine Klasse bilden. Durch die Beschreibung von Äquivalenzrelationen im Mathematikunterricht wird der Prozeß der Klassifikation theoretisch dargestellt. Äquivalenzrelationen sind daher ein wichtiges Mittel zur Begriffsbildung.

Grundtypen mathematischer Begriffe sind:

Mengenbegriffe (werden durch Zusammenfassung von Objekten bestimmt: Primzahl, Trapez,...)

Relationbegriffe (werden durch Vergleich gefunden: parallel, kleiner, Teiler,...)
Operationbegriffe (entstehen aus Handlungen: Addition, Durchschnitt,...)
Strukturbegriffe (stellen Organisationsformen dar: Kommutativität der Addition,...)
Dabei handelt es sich um eine begriffliche Hierarchie. Zuerst werden Begriffe durch Abstraktion von konkreten Objekten gebildet, dann werden aus diesen Begriffen neue Begriffe durch Vergleich gebildet usw. Es entstehen Abstraktionen von Abstraktionen, also Begriffe höherer Ordnung.
Begriffsbildung hat einen logischen und einen psychologischen Aspekt. Je nach ihrem Zustandekommen unterscheidet man empirische und theoretische Begriffe.
Empirische Begriffe: Ausgehend von der Anschauung oder von Beispielen wird der Begriff durch Abstraktion gewonnen. Der Schüler muß die entsprechenden Objekte oder Sachverhalte vergleichen, die begriffsbildenden Eigenschaften erkennen und den Namen für den Begriff lernen.
Theoretische Begriffe: Durch Definition werden die begriffsbildenden Merkmale festgelegt. (Dazu gehört auch die Spezifizierung von schon gebildeten Begriffen)
Bsp: Primzahl, Winkel, ein Quadrat ist ein Rechteck mit gleich langen Seiten, Durchschnittsmenge, Ellipse,...
Begriffsbildung ist kein rein sprachlicher Prozeß. Psychologisch betrachtet kann man einen Begriff gebildet haben, ohne den Namen oder die theoretische Definition dafür zu kennen. Auf eine entsprechende Frage antworten dann Kinder, indem sie einen Repräsentanten für den Begriff nennen oder zeigen.
(Was ist eine Primzahl: 7, Was ist ein Quadrat: das da).
Umgekehrt können (ältere) Schüler oft Namen und Definition hersagen, ohne den Begriff gebildet zu haben.

2. Bildung von Begriffen

Beim empirischen Begriffslernen sollen aus anschaulich Gegebenem oder aus Beispielen die relevanten Merkmale erkannt werden. Zunächst besteht die Aufgabe der Schüler darin, das Gemeinsame zu erkennen. Daher wird man die Lernsituation am Anfang so gestalten, daß möglichst wenig irrelevante Merkmale auftreten (Einführungsbeispiele). Später kommen in verstärktem Maß Beispiele mit irrelevanten Eigenschaften hinzu (Variationsprinzip), um Fehler in der Begriffsbildung zu vermeiden.
Fehler sind:
Verengung des Begriffs (Untergeneralisierung): auch irrelevante Eigenschaften werden für begriffsbildend gehalten, zB Lage-, Form- oder Größeneigenschaften (ein Stück Blech wird nicht als Prisma erkannt, weil eine bestimmte Höhe für relevant gehalten wird, ein Trapez mit lotrechten Parallelseiten wird nicht als solches erkannt, weil die waagrechte Lage der Seite a für relevant gehalten wird,usw). Vermeidung des Fehlers durch Variation der Aufgabenstellung.
Ausweitung des Begriffs (Übergeneralisierung): nicht alle begriffsbildenden Eigenschaften werden erkannt (eine Raute wird als verschobenes Quadrat bezeichnet, der Höhensatz auf beliebige Dreiecke angewendet). Vermeidung durch Gegenbeispiele. Die besten Gegenbeispiele sind solche, die alle relevanten Merkmale des Begriffs aufweisen, bis auf eines. Gute Gegenbeispiele sind solche, die leicht für Beispiele gehalten werden. Überhaupt sollte die Bedeutung von Gegenbeispielen nicht unterschätzt werden.(Eine Abbildung "punkttreu" zu nennen, hat erst dann einen Sinn, wenn man zum Vergleich eine Abbildung anführen kann, die nicht punkttreu ist).

3. Didaktische Analyse

Die theoretische Definition von Begriffen fällt Schülern der Unterstufe noch schwer, da ihr Denken noch viel zu sehr an die Anschauung gebunden ist. Solche Definitionen sind auch häufig zu abstrakt und nicht altersadäquat formuliert.

(Was ist eine Äquivalenzumformung? Was ist ein Term?). Hier versucht man einem Exaktheitsanspruch der Mathematik gerecht zu werden ohne Rücksicht auf die denkpsychologischen Voraussetzungen der Kinder. Volle mathematische Exaktheit ist aber ein Ziel, das erst im Laufe der Jahre erreicht werden kann. Man darf im Unterricht nichts Falsches sagen und nichts Sinnleeres ("Unter einem Winkel versteht man die Neigung der Schenkel zueinander"). Mitunter wird es aber geraten sein, nur einen Teil des vollständigen Sachverhalts zu bringen. Hier heißt es für uns Systematiker etwas umzudenken. (1.Kl.:"Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge" - ohne daß zu diesem Zeitpunkt eine logische Erklärung möglich ist). Dort wo Begriffe empirisch, über die Anschauung oder über konkrete Handlungen gewonnen werden, sollte man auch genetische Definitionen geben: Die begriffsbildenden Merkmale der Objekte werden beschrieben oder die Handlungen, die zum Begriff führen (Wie erhält man,... Wie entsteht,...).
Die gleichen Überlegungen gelten für die Formulierung von Regeln und Sätzen.
Bsp.: Die Lösungsmenge eines Systems zweier linearer Gleichungen in 2 Variablen ist die Durchschnittsmenge der Lösungsmengen der beiden Gleichungen des Systems.
Die streng exakte Beschreibung eines theoretischen Sachverhalts bleibt oft unverständlich. In einer kindgemäßen Sprechweise wird darauf verzichtet, alle mathematischen Voraussetzungen zu nennen, solange keine Mißverständnisse auftreten ("lineare" Gleichungen, wenn keine anderen auftreten,"in 2 Variablen",usw). Eine genetische Beschreibung geht von den Handlungen (Operationen, Zuordnungen,...) aus, die zum richtigen Resultat führen: "Man darf,..." im Sinne mathematischer Richtigkeit. (Man darf die beiden Seiten einer Gleichung mit derselben Zahl multiplizieren).
Bsp.: Eine richtige Proportion geht in eine richtige Proportion über, wenn man die Verhältniszahlen einer Seite mit derselben (von Null verschiedenen) Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Genetische Beschreibung: In einer Proportion darf das Verhältnis auf jeder Seite gekürzt oder erweitert werden.

II Problemlösen

Unter einem mathematischen Problem wollen wir jede Aufgabe verstehen, deren Lösungsweg noch unbekannt ist.
Der Problemlösevorgang selbst ist eine komplexer Denkprozeß, bei dem nicht nur geistige Fähigkeiten angewendet werden, sondern sich auch solche herausbilden.
Zunächst ist eine Problemsituation gegeben (Problemstellung durch den Lehrer). Das Problem muß inhaltlich verstanden werden, dh. die auftretenden Begriffe müssen bekannt sein.
Nach G. Lippig (Zu psychologischen Problemen des Mathematikunterrichts, in: Mathematik in der Schule, 1973 Heft 5) besteht der Problemlösevorgang darin, daß ein Ausgangszustand über gewisse Zwischenzustände durch Transformationen in einen Endzustand übergeführt wird.
Problementwicklung bzw. Problemlösung kann also als schrittweises Umformen oder Umstrukturieren des Problems dargestellt werden. Hier bietet sich der Vergleich mit Gleichungslösen, Termumformung, Sachaufgaben, Beweisführung, Konstruktionsschritten usw. an. Dieser Transformationsprozeß kann aus einer Wissensaktualisierung (reproduktives Denken) oder aus einer echten Findeleistung (produktives Denken) bestehen.
Typische mathematische Problemstellungen sind:
die Bildung von mathematischen Begriffen,
Erarbeitung von Rechenregeln,
Durchführung von Konstruktionen,
Herleitung von Formeln,
Beweis von Lehrsätzen,
Lösung von Sachaufgaben.
Um ein Problem verständlich zu machen, ist eine exakte Problemstellung notwendig. Schon die Art der Problemformulierung (Präsentation) trägt zum Lösungserfolg bei. Umstrukturieren, Ordnen und Klassifizieren sind wichtige Denkprozesse, die

beim Problemlösen gefördert werden. Auf Handlungshilfen, wie das Arbeiten mit Materialien und Wahrnehmungshilfen durch bildhafte Darstellungen wird im folgenden noch eingegangen.

Didaktische Bemerkungen

Problemlösen im Mathematikunterricht ist ein sehr wertvoller Lernprozeß. Das Suchen von Lösungen steht dabei im Vordergrund, nicht das Lernen von Antworten. Nur wenn die Schüler die Lösung selbst erarbeitet haben, lassen sich die gewonnenen Strategien auf andere Situationen übertragen (Transfer). Beim Lösen mathematischer Aufgaben sollten die Schüler zum produktiven Denken ermutigt werden. Das bedeutet aber, daß "unbrauchbare" Lösungsvorschläge nicht sofort abgewertet werden dürfen (Bewertungsaufschub). Zuerst setzt divergentes Denken ein, dann erst konvergentes.

Vor Übertreibungen muß aber gewarnt werden. Gerade in Mathematik gibt es oft schwierige Probleme, die von den Schülern nicht selbständig erarbeitet werden können. Hier ist Wissensvermittlung durch den Lehrer und der kritische Nachvollzug durch die Schüler die angemessenen Methode. Schüler sollen nicht nur zum selbständigen Denken erzogen werden, sie müssen auch lernen, Informationen zu verarbeiten und Wissen zu übernehmen.

Begriffbildung und Problemlösen sind nicht nur von der Lernsituation (Methode) abhängig, sondern auch von der Denkentwicklung des Schülers. Aus der Fülle aller Lerntheorien soll hier noch eine skizziert werden, die für den Mathematikunterricht besondere Bedeutung hat und gleichzeitig Hinweise auf mögliche Lösungshilfen liefert:

Die Medientheorie (der psychologischen Repräsentation) von J. S. Bruner

Der Erwerb und die Darstellung von Wissen (die Begriffsbildung, der Aufbau kognitiver Strukturen) vollziehen sich auf drei verschiedenen, hierarchisch geordneten Darstellungsebenen:

durch Handlungen, Bilder (auch Vorstellungsbilder), Symbole (Sprache).
Man unterscheidet daher
die handlungsmäßige Darstellung
die bildhafte Darstellung
die symbolische (sprachliche) Darstellung.
Als didaktische Konsequenz schreibt Bruner in seinem "Entwurf einer Unterrichtstheorie" 1974: "Jeder Wissenbereich kann auf dreifache Art dargeboten werden: durch eine Zahl von Handlungen, die geeignet sind, ein bestimmtes Ziel zu erreichen, durch eine Reihe zusammenfassender Bilder oder Graphiken,... und durch eine Folge symbolischer oder logischer Lehrsätze,...
Von dieser Medientheorie erhielt die Mathematikdidaktik wertvolle Impulse. Die Aufgabe des Lehrers besteht darin, für jeden Lehrinhalt die geeignete Darstellungsform zu finden, bzw einen bestimmten Sachverhalt auf mehrfache Weise zu repräsentieren, also die Darstellungsebenen zu wechseln.

Literatur

Bruner, J.S. u.a.: Studien zur kognitiven Entwicklung, Stuttgart 1971

Bruner, J.S.: Entwurf einer Unterrichtstheorie, Berlin 1974

Ellrott, D./Schindler, M.: Die Reform des Mathematikunterrichts, Bad Heilbrunn 1975

Fenz, R.: Fachdidaktik Mathematik, Materialien zur Pädagogik, Jugend und Volk, Wien 1981

Lippig, G.: Zu psychologischen Problemen des Mathematikunterrichts, in: Mathematik in der Schule, 1973

Oerter, R.: Psychologie des Denkens, Donauwörth 1977